Apellido y Nombre: N° de libreta:

1	2	3	4	5	NOTA

El examen se aprueba sumando un total de 60 puntos o más. Por favor entregar cada ejercicio en hojas separadas. Justificar todas las respuestas.

1. **[20 puntos]** Se colocan 6 bolillas en 4 urnas.

   a) [8 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que todas las urnas estén ocupadas?

   b) [12 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que al menos tres urnas estén ocupadas?

   Resolver ambos items tanto para la estadística de *Bose-Einstein* como la de *Maxwell-Boltzmann*.

2. **[15 puntos]** Se tienen 3 fuentes radioactivas F_1, F_2 y F_3. El número de partículas que emite cada fuente por hora es una variable con distribución $\mathcal{P}(\lambda_i)$, siendo $\lambda_i = i + 1$ para $i = 1, 2, 3$. Un investigador elige una fuente al azar y observa que esta emite 4 partículas en una hora.
   Encontrar la probabilidad de que haya elegido la fuente F_2.

3. **[20 puntos]** *Leia* colecciona muñecas *lol* las cuales se venden por internet y vienen en n modelos diferentes. Cuando se realiza la compra puede tocarle cualquier muñeca con la misma probabilidad y cada compra es independiente de todas las anteriores.

   a) [10 puntos] Si ya posee k muñecas diferentes, ¿cuál es el número esperado de compras necesarias para obtener otra distinta?

   b) [10 puntos] Hallar el número esperado de muñecas que necesita comprar para obtener un juego completo con al menos una muñeca de cada modelo.

4. **[20 puntos]** Sean $X_1, \cdots, X_n$ v.a.i.i.d con distribución $\mathcal{U}[0,1]$ definidas sobre un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Consideremos $X_{(1)} = \text{mín}\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ y $X_{(n)} = \text{máx}\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$.

   (a) [5 puntos] Calcular $\mathbb{E}\big[X_{(n)} - X_{(1)}\big]$.

   (b) [10 puntos] Probar que $X_{(n)} - X_{(1)} \sim \beta(n-1, 2)$.

   (c) [5 puntos] Calcular $\mathbb{P}\big(X_{(1)} \leq X_{(n)} - \frac{1}{2}\big)$.

   Tener en cuenta que si $X_1, \cdots, X_n$ v.a.i.i.d. absolutamente continuas con densidad f y distribución F, entonces:

   $$f_{X_{(1)}X_{(n)}}(x_1, x_n) = n(n-1)f(x_1)f(x_n)[F(x_n) - F(x_1)]^{n-2}\mathbf{1}_{(-\infty, x_n)}(x_1).$$

5. **[25 puntos]** Sean X_1, X_2 v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro λ. Sean

   $$\begin{cases} Y_1 &= X_1 \\ Y_2 &= X_1 + X_2 \end{cases}$$

   (a) [7 puntos] Hallar la densidad conjunta de (Y_1, Y_2).

   (b) [5 puntos] Hallar la densidad de Y_2.

   (c) [9 puntos] Sea $Z \sim \Gamma(2, \lambda)$ independiente de X_1, X_2. Hallar las distribuciones de $U = Z + Y_2$ y $V = \frac{Z}{Z+Y_2}$.

   (d) [4 puntos] ¿U y V son independientes?